PARAGRAAF 6.1 : RAAKLIJNEN EN EXTREME WAARDEN

LES 1 : HERHALING VAN DIFFERENTIËREN EN RAAKLIJNEN

THEORIE

(1) Differentiëren = Afgeleide bepalen = { Berekenen hellingfunctie f'(x) }
(2) Helling in x = 5 $\rightarrow f'(5)$
(3) Helling = 10 $\rightarrow f'(x) = 10$

DIFFERENTIEERREGELS

(1) Hoofdregel differentiëren : $f(x) = a \cdot x^n \rightarrow f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$
(2) Hulpregel 1 : $f(x) = a \cdot x \rightarrow f'(x) = a$
(3) Hulpregel 2 : $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$

VOORBEELD 1

a. Differentieer $f(x) = 3x^5 - 7x^2 + 5x - 2$

Gegeven $g(x) = (7x^2 + 5)(x - 3)$

b. Bepaal de afgeleide

c. Bereken de helling in x = 3

d. Bereken de punten waar de helling gelijk is aan 5.

OPLOSSING 1

Differentieer

a. $f'(x) = 15x^4 - 14x + 5$

b. $g(x) = 7x^3 - 21x^2 + 5x - 15$

$g'(x) = 21x^2 - 42x + 5$

c. $g'(3) = 21 \cdot 3^2 - 42 \cdot 3 + 5 = 68$

d. $g'(x) = 5$

$21x^2 - 42x + 5 = 5$

$21x^2 - 42x = 0$

$x(21x - 42) = 0$

$x = 0 \quad v \quad 21x = 42$

$x = 0 \quad v \quad x = 2$

Bereken de y-coördinaten door x in de gewone functie in te vullen :

$y = g(0) = -15 \;\; dus\ (0, -15)$

$y = g(2) = -33 \;\; dus\ (0, -33)$

STAPPENPLAN RAAKLIJN OPSTELLEN BIJ X = 3

(1) Algemene vergelijking van een lijn (en dus ook van een raaklijn) → $y = ax + b$

(2) Bereken de y-coördinaat.

(3) Bereken de a met de afgeleide $f'(x)$. Dus $a = f'(3)$.

(4) Bereken b door x, y en a in te vullen bij $y = ax + b$.

(5) Geef de vergelijking van de raaklijn.

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$. Bepaal de raaklijn in x=3

OPLOSSING 1

(1) Algemene vergelijking raaklijn → $y = ax + b$

(2) $y = f(3) = 19$

(3) $f'(x) = 4x - 3$
$a = f'(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 9$
Dus $a = 9$

(4) Je weet $y = 9x + b$
Je weet ook het punt $(3{,}19)$
Invullen geeft $19 = 9 \cdot 3 + b$

$b = -8$

(5) Dus raaklijn : $y = 9x - 8$.

LES 2 : HERHALING VAN EXTREME WAARDEN

THEORIE EXTREME WAARDE

(1) Extreme waarde = { Maximum of minimum } = { Top }
(2) In een top geldt dat de helling = 0
(3) Top berekenen → $f'(x) = 0$!!!
(4) De top is ALTIJD de y-waarde.

VOORBEELD 2

Gegeven is de functie $f(x) = 9x^2 + 36x$.

a. Bereken algebraïsch de helling in $x = 3$.

b. Bereken algebraïsch de coördinaat waar de helling gelijk is aan -9.

c. Bereken algebraïsch de raaklijn in $x = 2$.

d. Bereken algebraïsch de coördinaten van de top.

OPLOSSING 2

a. $f'(x) = 18x + 36$

Helling in $x = 3$ is : $f'(3) = 18 \cdot 3 + 36 = 90$

b. $f'(x) = -9$ dus $18x + 36 = -9$

$18x = -45$

$x = -2½$

$y = f(-2½) = 9(-2½)^2 + 36(-2½) = -33\frac{3}{4}$

Coördinaat $A = (-2½, -33\frac{3}{4})$

c. Neem het stappenplan erbij. Alleen stap 3 kan nu sneller :

(1) Algemene vergelijking raaklijn → $y = ax + b$

(2) $y = f(2) = 108$

(3) $f'(x) = 18x + 36$

$a = f'(2) = 72$

(4) Je weet $y = 72x + b.$

Invullen van $(2{,}108)$ geeft :

$108 = 72 \cdot 2 + b$

$b = -36$

(5) Dus raaklijn : $y = 72x - 36$

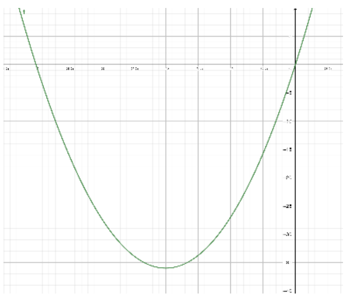
d. In de top geldt : HELLING = 0 → $f'(x) = 0$

$f'(x) = 18x + 36 = 0$

$18x = -36$

$x = -2$

$y = f(-2) = -36.$



Dus de top is $(-2, -36)$

Dit is een minimum (dalparabool)

LES 3 : AANTAL OPLOSSINGEN VOOR $y = p$

VOORBEELD 1

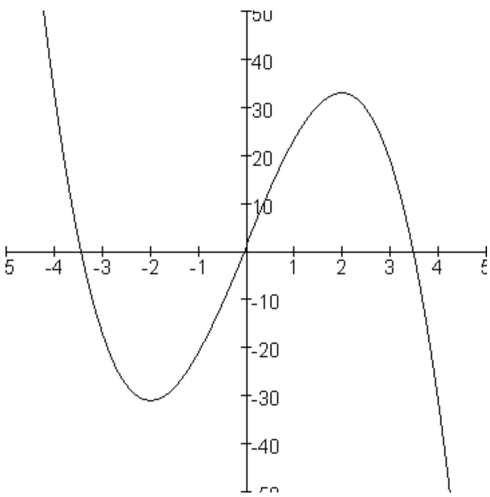
Gegeven is $f(x) = -2x^3 + 24x + 1$

a. Bereken algebraïsch de coördinaten van de top.

b. Bereken algebraïsch voor welke p de vergelijking f(x) = p er 3 oplossingen zijn.

OPLOSSING 1

Maak eerst een schets :



a. Toppen $f'(x) = 0 \rightarrow$

$$-6x^2 + 24 = 0$$

$$6x^2 = 24$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \;v\; x = -2$$

$$y = 33 \;v\; y = -31$$

b. De lijn $y = p$ heeft 3 oplossingen als $-31 < p < 33$

PARAGRAAF 6.2 : DE AFGELEIDE VAN Y = AX^N

VOORBEELD 1

Differentieer en schrijf zonder minmachten en gebroken machten (½ etc.)

a. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}$

b. $g(x) = \frac{3-x^2}{x^3}$

c. $h(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}$

OPLOSSING 1

a. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} = x^{-1} + 4x^{-2}$

$f'(x) = -1x^{-2} - 8x^{-3} = \frac{-1}{x^2} - \frac{8}{x^3}$

b. $g(x) = \frac{3-x^2}{x^3}$

$g(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} = 3x^{-3} - x^{-1}$

$g'(x) = -9x^{-4} + x^{-2} = \frac{-9}{x^4} + \frac{1}{x^2}$

c. $h(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}$

$h'(x) = -\frac{1}{8}x^{-1\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8}\frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} \;\left(= -\frac{1}{8}\frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{8}\frac{1}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{8x\sqrt{x}}\right)$

PARAGRAAF 6.3 : SAMENGESTELDE FUNCTIES

LES 1 : DE KETTINGREGEL (SAMENGESTELDE FUNCTIE)

VOORBEELD 1

Differentieer de functie $f(x) = (10 - 4x)^7$

POGING 1 : HAAKJES WEGWERKEN

Je haalt de haakjes weg. Maar dat is niet te doen !!!

POGING 2 : DE KETTINGREGEL GEBRUIKEN

Deze functie bestaat eigenlijk uit twee delen :

x → 10 - 4x → $(10 - 4x)^7$. **(Stel u = 10 - 4x)**

u → u^7

THEORIE KETTINGREGEL

Kettingregel : $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$

OPLOSSING 1

(1) Neem $u = 10 - 4x \quad \rightarrow u' = -4$

Dan is $f(u) = u^7 \ \rightarrow f'(u) = 7u^6$

(2) $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = -4 \cdot 7u^6 = -4 \cdot 7(10 - 4x)^6 =$

$f'(x) = -28(10 - 4x)^6$

SNELLE MANIER

Het kan ook sneller zonder de u. De macht ervoor, de macht eentje lager en vermenigvuldigen met de afgeleide van wat tussen haakjes staat.

$$f'(x) = -4 \cdot 7(10-4x)^6 = -28(10-4x)^6$$

VOORBEELD 2

Differentieer

a. $f(x) = \sqrt{5x+2}$

b. $g(x) = 3x + 7 - \sqrt{10-4x}$

OPLOSSING 2

We lossen dit op, op de snelle manier.

a. $f(x) = \sqrt{5x+2} = (5x+2)^{\frac{1}{2}}$

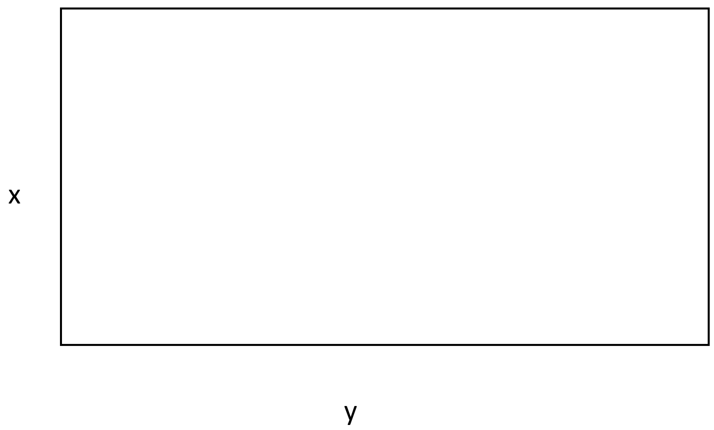
$$f'(x) = \frac{1}{2}(5x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5 = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(5x+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\frac{1}{2}}{(5x+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\frac{1}{2}}{\sqrt{5x+2}}$$

b. $g(x) = 3x + 7 - \sqrt{10-4x} = 3x + 7 - (10-4x)^{\frac{1}{2}}$

$$g(x) = 3 - \frac{1}{2}(10-4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4 = 3 + 2\frac{1}{(10-4x)^{\frac{1}{2}}} = 3 + \frac{2}{(10-4x)^{\frac{1}{2}}} = 3 + \frac{2}{\sqrt{10-4x}}$$

PARAGRAAF 6.4 : OPTIMALISEREN

LES 1 PRAKTISCHE PROBLEMEN DEEL 1



VOORBEELD 1

Een boer heeft een stuk land met lengte y en breedte x. Hij heeft 380 m gaas waarmee hij een zo groot mogelijke oppervlakte wil afzetten.

Bereken algebraïsch de grootst mogelijke oppervlakte voor dit stuk land.

STAPPENPLAN PRAKTISCH PROBLEEM

(1) Stel de 1^e formule waar je een getal van weet en schrijf deze om tot y =…

(2) Stel de 2^e formule van de formule die je maximaal (minimaal moet maken)

(3) Vul de y-formule in in de 2^e formule

(4) Differentieer om het maximum te vinden en bereken het maximum

OPLOSSING 1

Stel twee formules op

(1) De lengte van het gaas : $2x + 2y = 380$

Schrijf formule 1 om tot y =… : $2y = 380 - 2x$

$y = 190 - x$

(2) De oppervlakte : $Opp = x \cdot y$

(3) Vul de y-formule in in de opp : $Opp = x \cdot (190 - x) = 190x - x^2.$

(4) Differentieer om het maximum te vinden $Opp' = 190 - 2x = 0$

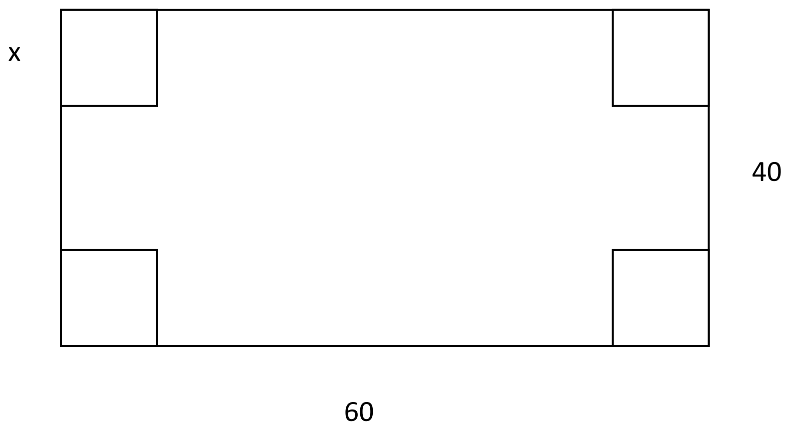
$2x = 190$

$x = 95$

Bereken de maximale oppervlakte : $Opp\,(95) = 190 \cdot 95 - 95^2 = 9025\ m^2.$

VOORBEELD 2

Gegeven is een stuk karton van 40 bij 60.



Daarvan wil men een doosje maken. Men knipt daarom de hoekjes van x bij x cm af van het doosje.

a. Bereken de inhoud van het doosje als $x = 5$ cm.

b. Toon aan dat de formule voor de inhoud geschreven kan worden als
$I = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$

c. Bereken algebraïsch de maximale inhoud.

OPLOSSING 2

a. $Inhoud = (60 - 2x)(40 - 2x) \cdot x = (2400 - 120x - 80x + 4x^2)$
$I = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$

b. $I' = 12x^2 - 400x + 2400 = 0$

$D = 160000 - 4 \cdot 12 \cdot 2400 = 44800$

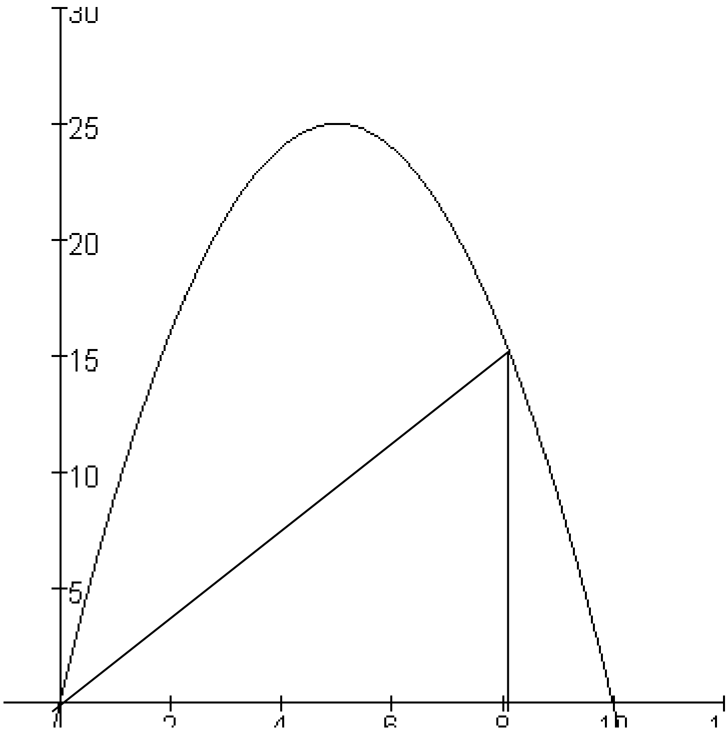
$x = \frac{400 \pm \sqrt{44800}}{2 \cdot 12}$

$x = 7{,}8 \;\; v \;\; x = 25{,}5 \;\; (kn)$

c. Dus I maximaal bij $x = 7{,}8$. De inhoud is dan $I = 8450$

LES 2 PRAKTISCHE PROBLEMEN DEEL 2

VOORBEELD 1



Gegeven is de parabool $y = -x^2 + 10x$. De lijn $x = p$ (met $0 < p < 10$) snijdt de x-as in het punt B en de parabool in punt C.

a. Neem $p = 6$. Toon aan dat de oppervlakte van driehoek OBC gelijk is aan 72.

b. Toon aan dat de oppervlakte van driehoek OBC voor willekeurige p gelijk is aan $O = 5p^2 - ½\,p^3$.

c. Bereken algebraïsch voor welke p de oppervlakte maximaal is.

OPLOSSING 1

a. $OB = 6\ en\ BC = -6^2 + 10 \cdot 6 = 24$.
$Opp\ OBC = ½ \cdot 6 \cdot 24 = 72.$

b. $OB = p\ en\ BC = -p^2 + 10p$.
$Opp\ OBC = ½ \cdot p \cdot (-p^2 + 10p) = 5p^2 - ½p^3.$

c. Maximum : $Opp' = 10p - 1½p^2 = 0$

$p(10 - 1½\,p) = 0$

$p = 0\ v\ 1½\,p = 10$

$p = 0\ v\ p = 6\frac{2}{3}.$

(kn)